

Calcul au second ordre d'une couche limite de convection mixte

M. AMAOUCHE et C. NOUAR

Laboratoire de Mécanique des Fluides, Institut de Physique, U.S.T.H.B., B.P. 32, Bab-Ezzouar, Alger, Algérie

(Reçu pour publication 23 octobre 1992)

1. INTRODUCTION

LE PROBLÈME de l'intégration des équations de Prandtl en convection mixte soulève en général quelques difficultés inhérentes à l'absence de conditions limites sur la variable d'évolution. Ces difficultés se traduisent par exemple par l'impossibilité de calculer les différentes fonctions de la représentation en série de Blasius de l'écoulement [1].

L'obstacle considéré ici, pour illustrer ce problème, est un cylindre circulaire chauffé à température uniforme. On se placera dans les conditions d'existence d'un écoulement de couche limite stationnaire et bidimensionnel (le cylindre est horizontal et infiniment long, la gamme des paramètres est convenablement choisie).

Lorsque l'écoulement uniforme loin de l'obstacle est vertical, on est en présence d'une convection mixte uniformément favorable ou adverse selon que les forces d'origine thermique assistent ou s'opposent aux forces motrices externes. Dans ces conditions les méthodes de prévision par le calcul demeurent semblables à celles utilisées en convection forcée. Dans les réfs. [2, 3] l'intégration des équations est effectuée au moyen d'un développement en série de Blasius des champs de vitesse et de température. Merkin [4] intègre numériquement les équations transformées de la couche limite. Les effets de l'instationnarité sont étudiés par Kim et Chang [5] et par Jain et Lohar [6]. Tout récemment Wang et Kleinstreuer [7] ont présenté des résultats relatifs à l'influence de la rotation et de la perméabilité pariétale sur une couche limite axisymétrique.

Quand l'écoulement lointain est non vertical (Fig. 1), le problème perd sa symétrie du fait que la fonction $j(x)$, représentant la composante tangentielle à la paroi du vecteur unitaire vertical ascendant, n'est pas paire. Des régions de convection mixte favorable et adverse coexistent alors dans la couche limite. C'est la rupture de symétrie qui entraîne la perte de la condition de démarrage de la couche limite.

Nous proposons dans ce qui suit un calcul approché permettant la réhabilitation de la condition manquante dans le cas des faibles poussées d'Archimède, sans avoir besoin de recourir à la résolution des équations complètes de Navier-Stokes [8-10].

2. FORMULATION

Dans le cadre des approximations de Boussinesq, les équations de la couche limite de Prandtl, en convection mixte, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left(L_{uv} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u - \varepsilon T \sin(\alpha + x) &= u_c \frac{du_c}{dx} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \left(Pr \cdot L_{uv} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Nous avons posé pour des commodités d'écriture, $L_{uv} = u \partial/\partial x + v \partial/\partial y$. Les conditions aux limites associées sont :

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = 1$$

$$u(x, \infty) = u_c(x), \quad T(x, \infty) = 0.$$

Les grandeurs sans dimensions x, y, u, v, T sont définies à partir des variables physiques x^*, y^*, u^*, v^*, T^* par les relations :

$$\begin{aligned} x^* &= Rx, \quad y^* = (R/Re^{1/2})y, \quad u^* = 2U_\infty u \\ v^* &= (2U_\infty/Re^{1/2})v, \quad T^* = T_\infty^* + T(T_p^* - T_\infty^*). \end{aligned} \quad (2)$$

x, y désignent respectivement la coordonnée longitudinale comptée à partir du point d'arrêt de l'écoulement de fluide parfait et la coordonnée normale à la paroi; u et v sont les composantes du champ des vitesses selon les directions x et y , T est la température. Le paramètre ε , mesure l'ordre de grandeur relatif des effets thermiques sur l'écoulement. Avec les références adoptées, l'écoulement potentiel est décrit par la fonction $u_c(x) = \sin(x)$. Le problème (1) n'est pas fermé dans la mesure où l'on ne dispose pas de conditions de Cauchy en $x = 0$. C'est la présence du terme de poussée d'Archimède dans l'équation du mouvement qui est responsable de la non disponibilité de telles conditions quand $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{N}$). Le problème peut cependant faire l'objet d'une approche au sens des développements asymptotiques quand le paramètre ε est petit. Nous admettrons cependant, afin de légitimer la démarche retenue, que ε demeure suffisamment grand devant $(Re)^{-1/2}$.

3. ANALYSE

Le problème (1) se présente comme un problème de perturbation régulière. Sa solution peut aussi être construite à partir du concept des développements asymptotiques raccordés. Cette deuxième manière d'envisager le problème nous semble être plus appropriée dans la mesure où elle permet une meilleure prise en compte des phénomènes physiques.

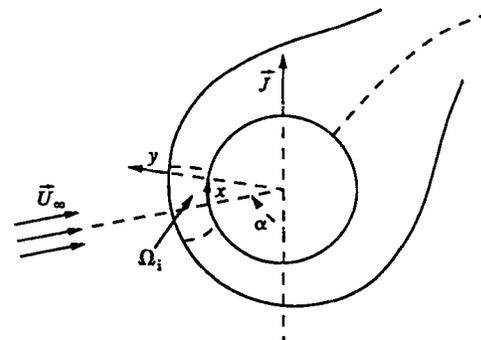


FIG. 1. Géométrie du problème.

NOMENCLATURE			
C_f	coefficient de frottement pariétal	β	coefficient de dilatation thermique
g	accélération gravitationnelle	ε	paramètre de la convection mixte, $g\beta(T_p - T_\infty)R/4U_\infty^2$
Nu	nombre de Nusselt	ν	viscosité cinématique
Pr	nombre de Prandtl	Ω_{ci}	domaine de validité des équations de Prandtl
R	rayon du cylindre	Ω_i	domaine proximal.
Re	nombre de Reynolds, $2U_\infty R/\nu$	Indices et exposants	
T	température		
u, v	composantes de vitesse	*	désigne les grandeurs dimensionnelles
x, y	coordonnées longitudinale et normale	\sim	caractérise le domaine proximal
X_s	abscisse du point de stagnation.	e	relatif à l'écoulement potentiel
Symboles grecs		∞	relatif à l'écoulement uniforme
α	inclinaison de l'écoulement uniforme par rapport à la verticale	p	se rapporte à la paroi.

3.1. Analyse régulière

Le principe de moindre dégénérescence nous incite à choisir comme séquence asymptotique $\mu_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ ($n \in N$). Nous cherchons donc u, v et T sous la forme :

$$(u, v, T) = (u_0, v_0, T_0) + \varepsilon(u_1, v_1, T_1) + O(\varepsilon^2). \quad (3)$$

Le report de ces développements dans les équations (1) conduit aux deux problèmes suivants :

3.1.1. *Première approximation.* Au premier ordre d'approximation, on obtient le problème classique de la convection forcée dont la formulation est :

$$\begin{aligned} \left(L_{u_0 v_0} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_0 &= u_c \frac{du_c}{dx} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0 \\ \left(Pr \cdot L_{u_0 v_0} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_0 &= 0 \\ u_0(x, 0) = v_0(x, 0) = 0, \quad T_0(x, 0) &= 1 \\ u_0(x, \infty) = u_c(x), \quad T_0(x, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

3.1.2. *Seconde approximation.* La perturbation (u_1, v_1, T_1) est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \left(L_{u_0 v_0} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_1 &= T_0 \cdot \sin(x + \alpha) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0 \\ \left(Pr \cdot L_{u_0 v_0} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) T_1 &= -Pr \cdot L_{u_1 v_1} T_0 \\ u_1(x, 0) = v_1(x, 0) = T_1(x, 0) &= 0 \\ u_1(x, \infty) = T_1(x, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Aucune difficulté de principe n'empêche la résolution numérique des problèmes (4) et (5) et le calcul des approximations successives d'ordre supérieur. Cette démarche est basée sur l'hypothèse selon laquelle la présence du petit paramètre ε induit, dans la totalité du domaine de validité Ω_{ci} des équations de Prandtl, des effets thermiques relativement faibles. Cette hypothèse s'avère inexacte dans un domaine proximal Ω_i , évanescents avec ε et contenant l'origine $x = 0$, où les deux termes sources sont simultanément faibles et peuvent par conséquent être du même ordre de grandeur. Il apparaît ainsi plus naturel de chercher un autre dével-

oppement, valable pour x petit, qui confère la même importance aux termes sources.

3.2. Développement proximal

La normalisation (2) et la nature régulière de la perturbation s'avèrent impropres à l'étude de l'écoulement dans le voisinage du point d'arrêt de fluide parfait puisqu'elles ne permettent pas de tenir compte, dès le premier ordre, de l'influence des effets thermiques. Il est possible d'éviter cette incohérence par l'introduction d'une normalisation adaptée à la description du domaine proximal Ω_i . Supposons à cet effet que les dimensions caractéristiques de la zone proximale sont ε^n et ε^m dans les directions x et y . Soient alors ε^l , ε^p et ε^q les ordres de grandeurs respectifs des variables u, v et T dans cette région.

Posons donc :

$$x = \varepsilon^n \tilde{x}, \quad y = \varepsilon^m \tilde{y}, \quad u = \varepsilon^l \tilde{u}, \quad v = \varepsilon^p \tilde{v}, \quad T = \varepsilon^q \tilde{T}. \quad (6)$$

Les grandeurs proximales ainsi définies sont supposées être évidemment d'ordre unité dans Ω_i . Le report de (6) dans le problème (1) et l'application du principe de moindre dégénérescence donne :

$$n = l = 1, \quad m = p = q = 0.$$

Le domaine proximal se définit donc comme

$$\Omega_i = \{(x, y) \in \Omega_{ci}, x = \text{ord}(\varepsilon)\}.$$

Dans cette région, le système de Prandtl devient

$$\begin{aligned} \left(L_{\tilde{u} \tilde{v}} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{u} - (\sin \alpha + \varepsilon \tilde{x} \cos \alpha + O(\varepsilon^2)) \tilde{T} &= \tilde{x} + O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \left(Pr \cdot L_{\tilde{u} \tilde{v}} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{T} &= 0 \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}(\tilde{x}, 0) &= 1 \\ \tilde{u}(\tilde{x}, \infty) = \tilde{x} + O(\varepsilon^2), \quad \tilde{T}(\tilde{x}, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

A l'instar des variables distales, les variables proximales sont exprimées sous forme de développements en série de puissance de ε , soit :

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{T}) = (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{T}_0) + \varepsilon(\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{T}_1) + O(\varepsilon^2). \quad (8)$$

L'injection de (8) dans (7) donne, en se limitant au deux premiers termes de chaque développement, les problèmes (9) et (10) :

$$\begin{aligned} \left(L_{\tilde{u}_0} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{u}_0 - \sin \alpha \cdot \tilde{T}_0 &= \tilde{x} \\ \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \left(Pr \cdot L_{\tilde{u}_0} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{T}_0 &= 0 \\ \tilde{u}_0(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}_0(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \tilde{T}_0(\tilde{x}, 0) &= 1 \\ \tilde{u}_0(\tilde{x}, \infty) = \tilde{x}, \quad \tilde{T}_0(\tilde{x}, \infty) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left(L_{\tilde{u}_1} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} \right) \tilde{u}_1 + \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{y}} \tilde{v}_1 - \sin \alpha \cdot \tilde{T}_1 &= \tilde{x} \cos \alpha \cdot \tilde{T}_0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \left(Pr \cdot L_{\tilde{u}_1} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) \tilde{T}_1 + Pr \left(\frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \tilde{x}} \tilde{u}_1 + \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \tilde{y}} \tilde{v}_1 \right) &= 0 \\ \tilde{u}_1(\tilde{x}, 0) = \tilde{v}_1(\tilde{x}, 0) = \tilde{T}_1(\tilde{x}, 0) &= 0 \\ \tilde{u}_1(\tilde{x}, \infty) = \tilde{T}_1(\tilde{x}, \infty) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Remarquons que les problèmes (9) et (10) constituent des dégénérescences des problèmes (4) et (5) dans les seuls cas où $\alpha = k\pi$.

La recherche des solutions distales et proximales aux ordres retenus nécessitent à présent que l'on précise les conditions de raccord.

3.3. Conditions de raccord

Elles sont basées sur le principe de l'existence [11] d'un domaine intermédiaire où sont valables les deux types de développement. Son application est immédiate, elle donne aux deux premiers ordres :

$$\begin{aligned} u_0(0, y) &= 0 \\ \tilde{v}_0(\infty, y) &= v_0(0, y) \\ \tilde{T}_0(\infty, y) &= T_0(0, y). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_1(0, y) &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \left(\tilde{u}_0(\tilde{x}, y) - \tilde{x} \frac{\partial u_0}{\partial x}(0, y) \right) \\ \tilde{v}_1(\infty, y) &= v_1(0, y) + \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \tilde{x} \frac{\partial v_0}{\partial x}(0, y) \\ \tilde{T}_1(\infty, y) &= T_1(0, y) + \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \tilde{x} \frac{\partial T_0}{\partial x}(0, y). \end{aligned} \quad (12)$$

4. CALCUL DES SOLUTIONS

4.1. Organisation des calculs

La première condition de (11) est bien confirmée à la propriété de symétrie de la première solution distale dont le calcul peut être effectué de différentes façons. Les deux conditions suivantes servent à calculer la première solution proximale. Après quoi on détermine la première correction de la solution de convection forcée grâce à la première relation de (12). La perturbation proximale (u_1, v_1, T_1) est enfin calculée en résolvant le problème (10) assorti des deux dernières conditions de (12).

4.2. Méthodes de résolution

4.2.1. *Solution de convection forcée.* Elle est calculée numériquement à l'aide d'un schéma aux différences finies implicite d'ordre deux en Δx , et Δy . L'équation du mouvement est, à titre indicatif, approchée en chaque noeud (x_i, y_j) par l'équation discrète :

$$\begin{aligned} (2u_{0j}^{i-1} - u_{0j}^{i-2}) \frac{3u_{0j}^i - 4u_{0j}^{i-1} + u_{0j}^{i-2}}{2\Delta x} \\ + (2v_{0j}^{i-1} - v_{0j}^{i-2}) \frac{u_{0j+1}^i - u_{0j-1}^i}{2\Delta y} \\ - \frac{u_{0j+1}^i - 2u_{0j}^i + u_{0j-1}^i}{\Delta y^2} = u_{0j}^i \left(\frac{du_{0j}}{dx} \right)^i. \end{aligned} \quad (13)$$

La sauvegarde de la précision 0 (Δx^3) au démarrage nécessite un traitement spécial déduit de l'analyse du comportement local de la solution quand $x \rightarrow 0$.

Son développement de Taylor s'écrit :

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= xF_1'(y) - \frac{x^3}{6} F_3'(y) + O(x^5) \\ v_0(x, y) &= -F_1(y) + \frac{x^2}{2} F_3(y) + O(x^4) \\ T_0(x, y) &= G_1(y) + \frac{x^2}{2} G_2(y) + O(x^4). \end{aligned} \quad (14)$$

Les fonctions F_1, G_1, F_3 et G_2 sont solutions des problèmes différentiels (15), (16), (17) et (18)

$$\begin{aligned} F_1''' + F_1 F_1'' - F_1'^2 + 1 &= 0 \\ F_1(0) = F_1'(0) = 0, \quad F_1'(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} G_1'' + Pr \cdot F_1 G_1' &= 0 \\ G_1(0) = 1, \quad G_1(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} F_3''' + F_1 F_3'' - 4F_1' F_3' + 3F_1'' F_3 + 4 &= 0 \\ F_3(0) = F_3'(0) = 0, \quad F_3'(\infty) &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_2'' + Pr \cdot (F_1 G_2' - 2F_1' G_2) &= Pr \cdot F_3 G_1' \\ G_2(0) = G_2(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

4.2.2. *Première solution proximale.* On vérifie sans peine que la solution du problème (9) possède la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(\tilde{x}, y) &= \tilde{x} F_1'(y) - \sin \alpha \cdot F_0'(y) \\ \tilde{v}_0(\tilde{x}, y) &= -F_1(y) \\ \tilde{T}_0(\tilde{x}, y) &= G_1(y). \end{aligned} \quad (19)$$

La fonction F_0 est telle que :

$$\begin{aligned} F_0'' + F_1 F_0'' - F_1' F_0' &= G_1 \\ F_0(0) = F_0'(0) = F_0'(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Les expressions (19) sont bien compatibles avec les conditions de raccord (11) car :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_0(\infty, y) = \tilde{v}_0(\tilde{x}, y) &= -F_1(y) = v_0(0, y) \\ \tilde{T}_0(\infty, y) = \tilde{T}_0(\tilde{x}, y) &= G_1(y) = T_0(0, y). \end{aligned}$$

Elles représentent de ce fait la solution proximale d'ordre un, elles décrivent l'écoulement de convection mixte au point de stagnation d'une plaque plane.

4.2.3. *Calcul de la seconde approximation régulière.* Ce calcul est conduit de la même manière que celui de la solution de convection forcée. Son démarrage, à partir de $x = 0$, nécessite que l'on précise la forme limite de $u_1(x, y)$ et $T_1(x, y)$ ainsi que les dérivées $\partial u_1 / \partial x(0, y)$ et $\partial T_1 / \partial x(0, y)$.

Remarquons d'abord que :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(\tilde{x}, y) &= \tilde{u}_0(0, y) + \int_0^{\tilde{x}} \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial t}(t, y) dt \\ &= \tilde{u}_0(0, y) - \int_0^{\tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y}(t, y) dt \end{aligned}$$

et comme $\partial u_0 / \partial x(0, y) = -\partial v_0 / \partial y(0, y)$, $u_1(0, y)$ devient, grâce à (12) :

$$u_1(0, y) = \tilde{u}_0(0, y) + \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \left(\tilde{x} \frac{\partial v_0}{\partial y}(0, y) - \int_0^{\tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial y}(t, y) dt \right)$$

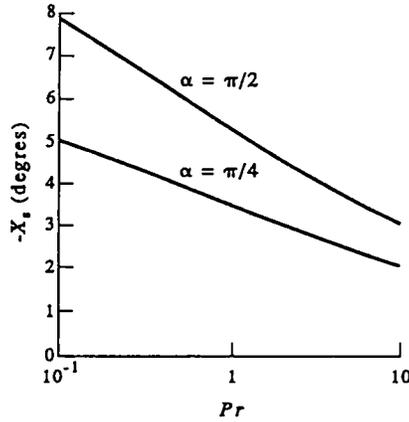


FIG. 2. Position du point de stagnation en fonction du nombre de Prandtl, $\varepsilon = 0,2$.

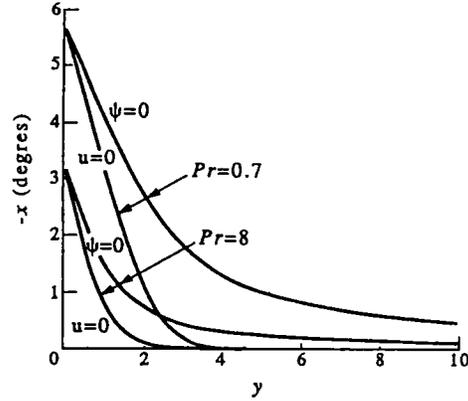


FIG. 3. Lignes de courant et de vitesse longitudinale nulles. $\varepsilon = 0,2, \alpha = \pi/2$.

ou bien encore :

$$u_1(0, y) = \bar{u}_0(0, y) + \frac{d}{dy} \int_0^\infty (v_0(0, y) - \bar{v}_0(t, y)) dt$$

or $\bar{v}_0(t, y) = v_0(0, y) = -F_1(y)$ en vertu des expressions (14) et (19) d'où :

$$u_1(0, y) = \bar{u}_0(0, y) = -\sin \alpha \cdot F'_0(y). \quad (21)$$

L'analyse du comportement local de cette seconde approximation conduit à :

$$\begin{aligned} T_1(0, y) &= \cos \alpha \cdot G_1^*(y) \\ \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, y) &= -\cos \alpha \cdot F_1^*(y) \\ \frac{\partial T_1}{\partial x}(0, y) &= -\sin \alpha \cdot G_2^*(y). \end{aligned} \quad (22)$$

F_1^*, G_1^* et G_2^* sont solutions des problèmes (23), (24) et (25).

$$\begin{aligned} F_1^{*''''} + F_1 F_1^{*''} - 2F_1' F_1^{*'} + F_1'' F_1^* &= G_1 \\ F_1^*(0) = F_1^{*'}(0) = F_1^{*''}(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} G_1^{*''} + Pr \cdot F_1 G_1^{*'} &= Pr \cdot F_1^* G_1' \\ G_1^*(0) = G_1^{*'}(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} G_2^{*''} + Pr(F_1 G_2^{*'} - F_1' G_2^*) &= Pr(F_0' G_2 - 2F_2 G_1') \\ G_2^*(0) = G_2^{*'}(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Dans cette dernière équation intervient une fonction F_2 , solution de

$$\begin{aligned} F_2^{*''} + F_1 F_2^{*'} - 3F_1' F_2 + 2F_1'' F_2 &= \frac{F_0'' F_3 - F_0' F_3' + G_2 - G_1}{2} \\ F_2(0) = F_2'(0) = F_2'(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

4.2.4. *Seconde approximation proximale.* La solution de (10) possède la forme :

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\bar{x}, y) &= \cos \alpha (\bar{x} F_1^{*'}(y) + \sin \alpha \cdot F_0^{*'}(y)) \\ \bar{v}_1(\bar{x}, y) &= \cos \alpha F_1^*(y) \\ \bar{T}_1(\bar{x}, y) &= \cos \alpha G_1^*(y). \end{aligned} \quad (27)$$

Ces expressions satisfont bien les conditions de raccord (12). La fonction F_0^* est solution du problème :

$$\begin{aligned} F_0^{*''''} + F_1 F_0^{*''} - F_1' F_0^{*'} &= F_0' F_0^{*'} - F_1^* F_0'' - G_1^* \\ F_0^*(0) = F_0^{*'}(0) = F_0^{*''}(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

dont la résolution numérique est effectuée, comme pour les

autres problèmes différentiels, par une méthode de tirs corrigés associée à un schéma de Runge-Kutta d'ordre quatre.

4.3. Récapitulation

La solution au second ordre obtenue à partir d'un développement régulier en ε , s'écrit, pour la composante longitudinale de vitesse par exemple :

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y).$$

Cette solution est uniformément valable dans le domaine Ω_{cl} ; son comportement à l'approche de $x = 0$, s'exprime par :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) &= x(F_1'(y) - \varepsilon \cos \alpha \cdot F_1^{*'}(y)) \\ &\quad - \varepsilon \sin \alpha \cdot F_0'(y) + O(\varepsilon x^2). \end{aligned}$$

Cette forme limite de la solution régulière est moins significative car contenue dans la solution proximale calculée au même ordre et dont l'expression est :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x(F_1'(y) - \varepsilon \cos \alpha \cdot F_1^{*'}(y)) \\ &\quad - \varepsilon \sin \alpha \cdot (F_0'(y) - \varepsilon \cos \alpha \cdot F_0^{*'}(y)). \end{aligned}$$

Cette dernière a l'avantage d'inclure le terme $\varepsilon^2 F_0^{*'}(y)$ au même titre que $x \varepsilon F_1^{*'}(y)$ quand $x = \text{ord}(\varepsilon)$.

4.4. Quelques résultats numériques

On définit le point de stagnation comme le point de la paroi, sur la face amont, où le frottement est nul. Son abscisse est :

$$X_s = \varepsilon \sin \alpha \frac{F_0''(0) - \varepsilon \cos \alpha F_0^{*''}(0)}{F_1''(0) - \varepsilon \cos \alpha F_1^{*''}(0)}.$$

Pour un nombre de Prandtl donné, X_s atteint son maximum pour une inclinaison α_m satisfaisant l'équation :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 F_1^{*''}(0) \cdot F_0^{*''}(0) \cos^3 \alpha_m \\ - \varepsilon (F_0^{*''}(0) \cdot F_1''(0) \cos 2\alpha_m - F_1^{*''} F_0'' \\ + F_1^{*''}(0) \cdot F_0''(0) \cos \alpha_m) &= 0. \end{aligned}$$

C'est pour $\alpha = \alpha_m$ que la sensibilité de l'écoulement vis à vis des effet thermiques, dans la zone de stagnation, est la plus élevée. Sur la Fig. 2 sont représentées les variations de X_s en fonction du nombre de Prandtl. Il en ressort notamment que la diminution de ce paramètre a pour effet d'accroître l'influence de la convection naturelle sur l'écoulement.

La ligne de courant et la ligne de vitesse longitudinale nulle ont pour équation respectivement :

$$X_{\psi=0} = \varepsilon \sin \alpha \frac{F_0(y) - \varepsilon \cos \alpha F_0^*(y)}{F_1(y) - \varepsilon \cos \alpha F_1^*(y)}$$

$$X_{u=0} = \varepsilon \sin \alpha \frac{F_0'(y) - \varepsilon \cos \alpha F_0^{*'}(y)}{F_1'(y) - \varepsilon \cos \alpha F_1^{*'}(y)}$$

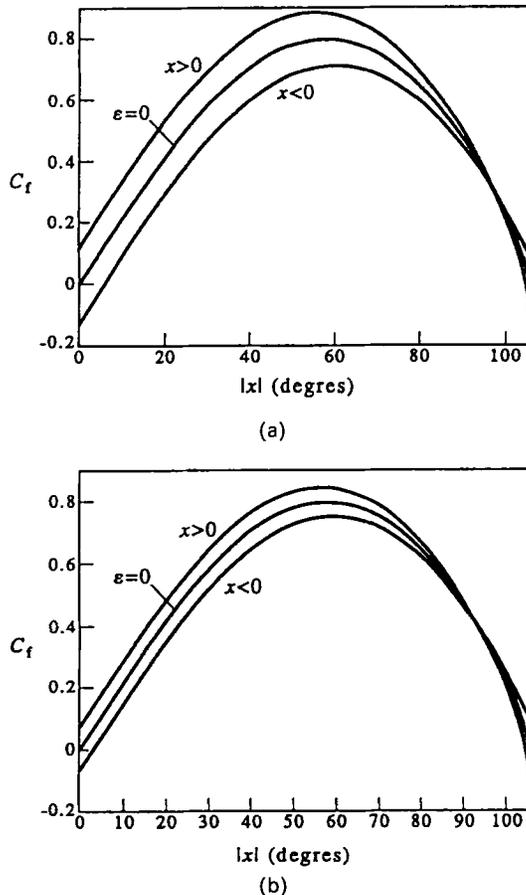


FIG. 4. Evolution du frottement pariétal. $\alpha = \pi/2$, $\varepsilon = 0,2$, (a) $Pr = 0.7$, (b) $Pr = 8$.

Ce sont des courbes qui caractérisent la zone de stagnation ; elles sont portées sur la Fig. 3. Il est aisé de montrer que la ligne $u = 0$ constitue le lieu géométrique des sommets des lignes de courant. La Fig. 4 montre l'évolution le long de la paroi, du coefficient de frottement ($C_f = \partial u / \partial y(x, 0)$) ; celle-ci met en exergue la dissymétrie de l'écoulement. On constate que les effets thermiques contribuent à une augmentation du frottement dans la région I et à une diminution de celui-ci dans la région II. Cette constatation n'est en fait valable que pour des abscisses angulaires dont le module restent inférieurs à une valeur limite de l'ordre de 90° . Au delà de cette abscisse limite, le frottement décroît plus rapidement sur la face II que sur la face I, conduisant ainsi plus rapidement au décollement de la couche limite.

La distribution pariétale du nombre de Nusselt (Fig. 5), défini par $Nu = -\partial T / \partial y(x, 0)$ montre que le transfert de chaleur est pratiquement insensible aux effets des forces d'Archimède partout sauf à proximité des points de séparation.

5. CONCLUSION

L'étude précédente décrit un écoulement de convection forcée faiblement perturbé par des forces d'origine ther-

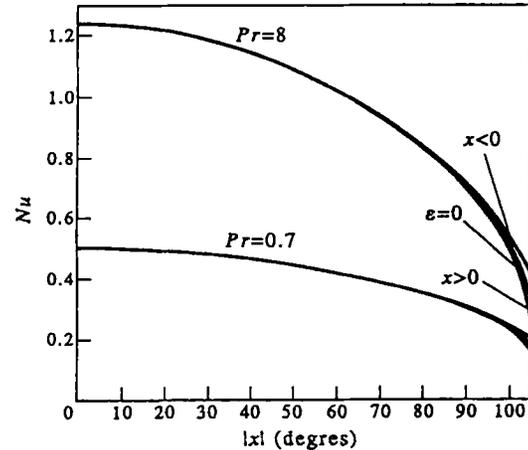


FIG. 5. Evolution du nombre de Nusselt. $\alpha = \pi/2$, $\varepsilon = 0,2$.

mique. Elle repose sur l'emploi de la méthode des développements asymptotiques raccordés qui conduit à des résultats plus significatifs que ceux issus d'un développement régulier en ε dans la zone de stagnation où $x = O(\varepsilon)$.

L'approximation retenue s'avère 'suffisamment précise' pour permettre d'analyser la perturbation que subit l'écoulement de base.

REFERENCES

1. M. Amaouche, On some mixed convection flows described by exact solutions of Prandtl equations, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **10**(3), 295-312 (1991).
2. N. D. Joshi and S. P. Sukatme, An analysis of combined free and forced convection heat transfer from a horizontal circular cylinder to a transverse flow, *J. Heat Transfer* **93**, 441-448 (1971).
3. E. M. Sparrow and L. Lee, Analysis of mixed convection about a horizontal cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 229-231 (1976).
4. J. H. Merkin, Mixed convection from horizontal circular cylinder, *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 73-76 (1977).
5. J. S. Kim and K. H. Chang, Unsteady boundary layer and its separation over a heated circular cylinder, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **8**, 165-179 (1988).
6. P. C. Jain and B. L. Lohar, Unsteady mixed convection heat transfer from a horizontal circular cylinder, *J. Heat Transfer* **101**, 126-131 (1979).
7. T. Y. Wang and C. Kleinstreuer, Mixed convection over rotating bodies with blowing and suction, *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 1309-1319 (1989).
8. H. M. Badr, On the effect of the flow direction on mixed convection from a horizontal cylinder, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **5**, 1-12 (1985).
9. M. Amaouche and J. L. Peube, Convection mixte stationnaire autour d'un cylindre horizontal, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, 1269-1279 (1985).
10. M. Amaouche and J. L. Peube, Convection mixte autour d'un cylindre horizontal, influence des variations des propriétés physiques avec la température, *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, 1293-1300 (1986).
11. M. Van Dyke, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, California (1975).